ACTAS DEL VIII ENCUENTRO DE GEOMETRÍA Y FÍSICA
MEDINA DEL CAMPO (VALLADOLID, ESPAÑA) (1999)
Publicaciones de la RSME, Vol. II, pp. 277–286.

Conexiones de segundo orden y la conexión normal de Cartan para una estructura conforme

IGNACIO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ

Dep. de Geometría y Topología, Univ. de Granada , 18071 Granada, España
e-mail: `ignacios@@ugr.es`

Abstract

Las conexiones de segundo orden son las herramientas geométricas adecuadas para establecer comparaciones entre objetos geométricos de segundo orden, por ejemplo aceleraciones, en puntos distintos. Puesto que cada conexión lineal induce de forma natural una conexión de segundo orden, podría parecer innecesario un estudio específico de las conexiones generales de segundo orden. Ahora bien, en variedades dotadas de estructura conforme, cada conexión lineal compatible tiene asociada otra conexión de segundo orden que no es la naturalmente inducida, a menos que el tensor de Ricci de la conexión lineal se anule. En este artículo se profundiza en el significado de una conexión de segundo orden; en particular, se analiza la forma en que ésta proporciona una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden, estrechamente relacionada con la ecuación de segundo orden de las geodésicas de una conexión lineal.

1 Introducción

Un objeto geométrico de orden $r \in \mathbb{N}$ sobre una variedad o sobre una parte de ella es, básicamente, un objeto que puede describirse en función de unas coordenadas cualesquiera y para el que el cambio de expresión de unas coordenadas a otras hace intervenir explícitamente las diferenciales hasta orden r

de la función de cambio de coordenadas. Hagamos este concepto más transparente.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Su estructura diferenciable define los fibrados de referencias orden superior sobre M ([4]). Dichos fibrados los podemos entender como una clasificación de las cartas de M que asignan el $0 \in \mathbb{R}^n$ a algún punto. Sea $\mathcal{I}$ el conjunto de inversas de cartas de M, con $0 \in \mathbb{R}^n$ en su dominio. El fibrado de referencias de orden r sobre M consiste en el conjunto cociente de $\mathcal{I}$ para la relación de equivalencia:

$$\phi \overset{r}{\sim} \phi' \;\Leftrightarrow\; \phi(0) = \phi'(0), \qquad D^s(x \circ \phi)|_0 = D^s(x \circ \phi')|_0,\ 1 \leq s \leq r;$$

donde ϕ, $\phi' \in \mathcal{I}$ y x es una carta arbitraria con $\phi(0)$ en su dominio. Denotamos al conjunto cociente $\mathcal{I}/ \overset{r}{\sim}$ por $F^r(M)$ y a una clase de equivalencia por $j_0^r(\phi)$, el r-jet en 0 de ϕ; $F^r(M)$ resulta ser un fibrado principal sobre M con proyección $j_0^r(\phi) \mapsto \phi(0)$ y con grupo de estructura el grupo $G^r(n)$ de los r-jets en 0 de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$ que preservan el 0. Denotemos por $\mathfrak{g}^r(n)$ el álgebra de Lie de $G^r(n)$. El fibrado $F^1(M)$ se identifica con el fibrado de referencias lineales $L(M)$, al igual que $G^1(n)$ se identifica con $GL(n, \mathbb{R})$.

La proyección natural $F^r(M) \to F^s(M)$, $j_0^r(\phi) \mapsto j_0^s(\phi)$, con $r > s$, es un epimorfismo de fibrados principales correspondiente al epimorfismo de grupos $G^r(n) \to G^s(n)$, $j_0^r(g) \mapsto j_0^s(g)$. Una conexión de orden r se define como una conexión principal en el fibrado $F^r(M)$. Por imagen directa, vía la proyección, una conexión de orden r proyecta en una conexión de orden s, si $r > s$.

Por otro lado, una conexión lineal, λ, induce una conexión de orden arbitrario r. Para ello se define $\sigma_\lambda^r \colon L(M) \to F^r(M)$ que asigna, a cada referencia lineal l sobre un punto $m \in M$, el r-jet en 0 de la inversa de la carta λ-normal centrada en m y correspondiente a la referencia l. Dicha aplicación es un monomorfismo de fibrados principales correspondiente al monomorfismo de grupos $GL(n, \mathbb{R}) \to G^r(n)$, $a \mapsto j_0^r(a)$. Por imagen directa, vía σ_λ^r, la propia conexión lineal λ induce una conexión de orden r, que a su vez proyecta en λ.

No sucede, en cambio, que una conexión de orden $s > 1$ induzca una conexión de orden $r > s$ que proyecte en la primera: un procedimiento similar al del párrafo anterior exige la existencia de un grupo de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n$, formado por representantes de $G^s(n)$, que sea isomorfo a $G^s(n)$, como es el caso del grupo $GL(n, \mathbb{R})$ para $s = 1$, lo cual no parece posible para $s > 1$. Esta circunstancia también puede entenderse viendo que $G^s(n)$ no es, al menos de forma natural, un subgrupo de $G^r(n)$ si $1 < s < r$ ([1]).

Un objeto geométrico de orden r se obtiene como parte de un fibrado asociado al fibrado de referencias de orden r. Veamos algunos casos relevantes.

El fibrado tangente de orden r, $T^r(M)$, que consiste en los r-jets en $0 \in \mathbb{R}$ de curvas en M con el 0 en su dominio, es un fibrado asociado a $F^r(M)$; como tal, está definido por la acción de $G^r(n)$ sobre la fibra típica $\mathbb{R}^{rn}$, acción que se deduce de cómo cambia de una carta a otra la expresión coordenada de un $j_0^r(\gamma)$, siendo γ una curva en M definida en algún entorno de 0. En el caso $r = 1$, la acción de $GL(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$ que resulta es una representación, la natural; por ello, $T^1(M)$ es un fibrado vectorial, que se identifica con el fibrado tangente TM. Para $r > 1$ no se obtienen representaciones, por lo cual los fibrados $T^r(M)$ no son vectoriales.

Las conexiones de orden r, a su vez, son objetos geométricos de orden $r+1$. Concretamente son secciones del fibrado asociado a $F^{r+1}(M)$ definido por la acción de $G^{r+1}(n)$ sobre la fibra típica $L(\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}^r(n))$; acción que se deduce de cómo cambian los coeficientes de la conexión respecto a dos cartas diferentes. Tampoco son fibrados vectoriales, ni siquiera el fibrado cuyas secciones son las conexiones lineales.

Los campos a lo largo de las fibras de $F^r(M)$ invariantes por la acción principal constituyen los elementos de un fibrado vectorial, $TF^r(M)/G^r(n)$, asociado a $F^{r+1}(M)$ correspondiente a una acción que es una representación natural de $G^{r+1}(n)$ sobre la fibra típica $\mathbb{R}^n + \mathfrak{g}^r(n)$, la misma acción que marca el tipo de la llamada forma canónica sobre $F^{r+1}(M)$ ([4]).

2 El fibrado de referencias de segundo orden y sus fibrados asociados

El grupo de estructura del fibrado de referencias de segundo orden, $F^2(M)$, es el grupo $G^2(n)$. Éste tiene una estructura de producto semidirecto que se hace explícita con el isomorfismo de grupos ([1]):

$$\begin{array}{ccc} G^2(n) & \xrightarrow{\cong} & GL(n, \mathbb{R}) \otimes S^2(n) \\ j_0^2(g) & \longmapsto & \left(Dg|_0\,, Dg|_0^{-1}\, D^2 g|_0\right), \end{array}$$

siendo $S^2(n)$ las aplicaciones bilineales simétricas de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$; donde el producto en $GL(n, \mathbb{R}) \otimes S^2(n)$ está definido por

$$(a\,, t) \cdot (a'\,, t') = (aa'\,, t_{a'^{-1}} + t'),$$

siendo $t_a \equiv at(a^{-1}, a^{-1})$. En adelante usaremos esta descripción de $G^2(n)$.

Veamos los tres fibrados asociados a $F^2(M)$ que se describían para orden arbitrario en la sección anterior.

El fibrado tangente de segundo orden, $T^2(M)$, es el fibrado asociado a $F^2(M)$ que corresponde a la acción dada por

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{B}\colon & G^2(n) \times \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & ((a,t),(v,w)) & \longmapsto & (av, at(v,v) + aw). \end{array}$$

Denotemos por $[z, s]$ a un elemento de un fibrado asociado, esto es, a la clase de equivalencia representada por un elemento z del fibrado principal y un elemento s de la fibra típica. La biyección entre 2-jets de curvas y elementos de dicho fibrado asociado viene dada por

$$j_0^2(\gamma) \longmapsto [j_0^2(\phi), (\left.\frac{d(\phi^{-1}\circ\gamma)}{du}\right|_0, \left.\frac{d^2(\phi^{-1}\circ\gamma)}{du^2}\right|_0)];$$

donde γ es una curva C^2 sobre M, cuyo dominio contiene al $0 \in \mathbb{R}$, y $j_0^2(\phi)$ es un elemento de $F^2(M)$ tal que $\phi(0) = \gamma(0)$. El fibrado asociado a $F^2(M)$, cuyas secciones se identifican con las conexiones lineales, viene dado por la acción

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{C}\colon & G^2(n) \times L(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})) & \longrightarrow & L(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})) \\ & ((a,t), s) & \longmapsto & (s-t)_a\,; \end{array}$$

donde se sobreentiende la identificación entre aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ y aplicaciones bilineales de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. La sección de este fibrado asociado, que se identifica con una conexión lineal λ, viene dada por

$$m \in M \longmapsto [j_0^2(\phi), \Gamma];$$

donde $j_0^2(\phi)$ es un elemento de $F^2(M)$ tal que $\phi(0) = m$ y $\Gamma \in L(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$ son los símbolos de Christoffel de λ en m, respecto de la carta ϕ^{-1}; se entiende que $\Gamma^i_{jk} \equiv \Gamma(e_j)^i_k$, siendo $\{e_j\}$ la base usual de $\mathbb{R}^n$. Como es bien sabido por la teoría de fibrados principales, las secciones de un fibrado asociado se corresponden con las funciones del fibrado principal en la fibra típica que son equiinvariantes respecto a la acción principal y a la acción en la fibra. En el presente caso, la función correspondiente es

$$\begin{array}{rccc} \Upsilon^\lambda\colon & F^2(M) & \longrightarrow & L(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})) \\ & j_0^2(\phi) & \longmapsto & \Gamma\,. \end{array}$$

Por último, el fibrado vectorial $TLM/GL(n,\mathbb{R})$ asociado a $F^2(M)$ corresponde a la representación (más detalles pueden encontrarse en [7]).

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}\colon & G^2(n) & \longrightarrow & GL(\mathbb{R}^n + \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})) \\ & (a,t) & \longmapsto & ((v,\beta) \mapsto (av, a(t(v)+\beta)a^{-1})); \end{array}$$

Expliquemos ahora las relaciones más importantes que hay entre dichos fibrados y los objetos geométricos relevantes a que dan lugar.

Denotemos por $AdLM$ al fibrado vectorial asociado a LM que corresponde a la representación adjunta de $GL(n,\mathbb{R})$ en su álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$), que se identifica con el fibrado de los endomorfismos de TM. El siguiente diagrama de aplicaciones fibradas muestra las relaciones que existen entre los fibrados asociados a $F^2(M)$ y a LM, junto a las aplicaciones fibradas que se establecen cuando damos una conexión lineal λ:

$$\begin{array}{ccccc} AdLM & \overset{\mathsf{a}}{\underset{\mathsf{a}_\lambda}{\rightleftharpoons}} & TLM/GL(n,\mathbb{R}) & \overset{\mathsf{b}}{\underset{\mathsf{b}_\lambda}{\rightleftharpoons}} & TM \\ & & \downarrow \mathsf{e} & & \\ TM & \overset{\mathsf{c}}{\underset{\mathsf{c}_\lambda}{\rightleftharpoons}} & T^2(M) & \overset{\mathsf{d}}{\underset{\mathsf{d}_\lambda}{\rightleftharpoons}} & TM; \end{array}$$

siendo, $\forall l \in LM$, $\forall z \in F^2(M)$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \alpha \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathsf{a}([l,\alpha]) &= [z,(0,\alpha)], & \mathsf{a}_\lambda([z,(v,\alpha)]) &= [l, \alpha + \Upsilon^\lambda|_z(v)], \\ \mathsf{b}([z,(v,\alpha)]) &= [l,v], & \mathsf{b}_\lambda([l,v]) &= [z,(v,-\Upsilon^\lambda|_z(v))], \\ \mathsf{c}([l,v]) &= [z,(0,v)], & \mathsf{c}_\lambda([z,(v,w)]) &= [l, w + \Upsilon^\lambda|_z(v,v)], \\ \mathsf{d}([z,(v,w)]) &= [l,v], & \mathsf{d}_\lambda([l,v]) &= [z,(v,-\Upsilon^\lambda|_z(v,v))], \\ \mathsf{e}([z,(v,\alpha)]) &= [z,(v,\alpha v)]; \end{aligned}$$

para las aplicaciones a, b_λ, c y d_λ, a la derecha de la igualdad se ha tomado cualquier z que proyecte en l; para las aplicaciones a_λ, b, c_λ y d, a la derecha de la igualdad se ha tomado como l el proyectado de z.

La fila superior del diagrama es la secuencia exacta de Atiyah del fibrado lineal, con la escisión que produce una conexión lineal ([2]). La fila inferior del diagrama corresponde a la estructura de fibrado vectorial que se obtiene en $T^2(M)$, como suma de Whitney de fibrados vectoriales $TM \oplus TM$, al introducir una conexión lineal ([3]).

A continuación mostramos algunas aplicaciones del diagrama anterior a algunos conceptos clásicos definidos a partir de curvas y campos de vectores.

Si γ es una curva en M, γ^1 su alzado natural a TM y γ^2 su alzado natural a $T^2(M)$, se obtiene que $\nabla^\lambda_{\gamma^1}\gamma^1 = \mathsf{c}_\lambda \circ \gamma^2$, siendo ∇^λ la derivada covariante usual que define la conexión lineal λ. La ecuación diferencial ordinaria de segundo orden de las geodésicas de λ, $\nabla^\lambda_{\gamma^1}\gamma^1 = 0$, es equivalente a la ecuación $\mathsf{d}_\lambda \circ \gamma^1 = \gamma^2$.

Un campo de vectores X sobre M es una sección del fibrado tangente TM, e induce de forma natural una sección X^2 del fibrado $T^2(M)$ y una sección $\tilde{X}$ del fibrado $TLM/GL(n,\mathbb{R})$ ([6], p.229). Se obtiene que $X^2 = \mathsf{e} \circ \tilde{X}$, que $\nabla^\lambda X = \mathsf{a}_\lambda \circ \tilde{X}$ y que $\nabla^\lambda_X X = \mathsf{c}_\lambda \circ X^2$. La ecuación $\nabla^\lambda X = 0$, definiendo lo que es un campo λ-paralelo, es equivalente a la ecuación $\tilde{X} = \mathsf{b}_\lambda \circ X$; y la ecuación $\nabla^\lambda_X X = 0$, definiendo lo que es un campo λ-geodésico, es equivalente a la ecuación $X^2 = \mathsf{d}_\lambda \circ X$.

3 Conexiones de segundo orden

Nos hubiera gustado proporcionar, para una conexión de segundo orden, un diagrama de aplicaciones fibradas similar al que hemos dado para conexiones lineales en la sección anterior, pero la situación ahora es bastante más complicada, como es lógico pensar, y el tema no está lo suficientemente maduro como para apreciar con un diagrama las relaciones geométricas que aportan las conexiones de segundo orden. Más bien nos vamos a centrar en las ecuaciones diferenciales ordinarias que produce de forma natural una conexión de segundo orden.

Sea ω una conexión de segundo orden, es decir, una conexión principal en el fibrado $F^2(M)$. Por imagen directa, vía la proyección natural de $F^2(M)$ en LM, ω proyecta en una conexión lineal, que denotamos en este apartado por λ. Como sucede para cualquier conexión principal, ω induce en cada fibrado asociado al fibrado principal $F^2(M)$ un "transporte paralelo" de fibras a lo largo de cualquier curva dada sobre M([6]). Veámoslo para el fibrado $T^2(M)$.

Sea γ una curva sobre M y sean t_0, $t \in \mathbb{R}$, y pertenecientes a un intervalo incluido en el dominio de definición de γ. Entonces se obtiene un difeomorfismo

$$\tau \equiv \tau_{t,t_0}^{\omega,\gamma} \colon T^2_{\gamma(t)}(M) \xrightarrow{\simeq} T^2_{\gamma(t_0)}(M),$$

definido por $\tau([\gamma^\omega(t),(v,w)]) = [\gamma^\omega(t_0),(v,w)]$, $\forall v,\ w \in \mathbb{R}^n$, siendo γ^ω un alzado ω-horizontal de γ a $F^2(M)$. Por otro lado, la conexión lineal λ proyectada de ω, proporciona una estructura de fibrado vectorial en $T^2(M)$, y en particular, una estructura de espacio vectorial en la fibra $T^2_{\gamma(t_0)}(M)$ (véase la sección 2). Por ello tiene sentido definir el siguiente límite, para una sección dada Z de $T^2(M)$ sobre la curva,

$$\nabla^\omega_{\gamma^1(t_0)} Z := \lim_{t\to t_0} \frac{\tau(Z_t) - Z_{t_0}}{t - t_0};$$

donde se ha incorporado en la notación el hecho de que el cálculo de dicho límite sólo depende de las primeras derivadas de la curva en el punto $\gamma(t_0)$. Resulta que $\nabla^\omega_{\gamma^1} Z$ es una nueva sección de T^2M sobre la curva.

Dos ecuaciones nos podemos plantear a partir de esta definición, a saber:

$$\mathsf{d} \circ \nabla^\omega_{\gamma^1}\gamma^2 = 0, \tag{1}$$

$$\mathsf{c}_\lambda \circ \nabla^\omega_{\gamma^1}\gamma^2 = 0. \tag{2}$$

La primera ecuación resulta ser la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, $\nabla^\lambda_{\gamma^1}\gamma^1 = 0$, de las geodésicas de la conexón lineal proyectada de ω. La segunda es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden.

Cuando ω es precisamente la conexión de segundo orden inducida por la conexión lineal λ (véase la sección 1), la segunda ecuación no es otra que $\nabla^\lambda_{\gamma^1}(\nabla^\lambda_{\gamma^1}\gamma^1) = 0$. Pero, en general, es una nueva ecuación que depende de la parte específica de segundo orden de ω. Veamos explícitamente cuál es esta ecuación.

Análogamente a lo que sucede para una conexión lineal, una conexión de segundo orden puede expresarse como una sección de un fibrado asociado al fibrado de referencias de tercer orden o, equivalentemente, como una función con el correspondiente tipo de equiinvariancia. No vamos a entrar ahora en los detalles; digamos que dicha función es de la forma

$$\begin{array}{rrcl} \Upsilon^\omega \equiv (\Upsilon^{0,\omega}, \Upsilon^{1,\omega})\colon & F^3(M) & \longrightarrow & L(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) + S^2(n)) \\ & j_0^3(\phi) & \longmapsto & (\Gamma,\ \bar{\Gamma}). \end{array}$$

La parte $\Upsilon^{0,\omega}$, valuada en $L(\mathbb{R}^n, \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$, es Υ^λ compuesta con la proyección de $F^3(M)$ en $F^2(M)$; así, $\Upsilon^{0,\omega}(j_0^3(\phi)) = \Gamma$ son los símbolos de Christoffel de λ en m respecto de la carta ϕ^{-1}. La parte $\Upsilon^{1,\omega}$, valuada en $L(\mathbb{R}^n, S^2(n))$, correspondería a la parte específica de segundo orden; es decir, $\Upsilon^{1,\omega}(j_0^3(\phi)) = \bar{\Gamma}$ serían los coeficientes específicos de segundo orden de la conexión ω en m, respecto de la carta ϕ^{-1}; escribiremos en componentes $\bar{\Gamma}(e_j)^i_{kl} \equiv \Gamma^i_{jkl}$, que son simétricos en k, l.

Recordemos que $T^3(M)$ es un fibrado asociado a $F^3(M)$. Restringiéndonos al caso en que λ sea simétrica, es decir, al caso en que $\Upsilon_\lambda \in S^2(n)$, definamos la aplicación fibrada,

$$\begin{array}{rcl} T^2(M) & \xrightarrow{\mathsf{f}_\omega} & T^3(M) \\ [z,(v,w)] & \longmapsto & [q,(v,w,-2\Upsilon^\lambda_z(v,\Upsilon^\lambda_z(v,v)) - 3\Upsilon^\lambda_z(v,w) - \Upsilon^{1,\omega}_q(v,v,v))], \end{array}$$

siendo q cualquier elemento de $F^3(M)$ que proyecte en z. Entonces la ecuación (2) se puede escribir como $\mathsf{f}_\omega \circ \gamma^2 = \gamma^3$, siendo γ^2 y γ^3 los alzados naturales a $T^2(M)$ y a $T^3(M)$ de una curva γ. Si se prefiere, dada una carta $(x^1,\ldots,x^n)$ de M y escribiendo $\gamma^i \equiv x^i \circ \gamma$, la ecuación (2) en coordenadas es:

$$\dddot{\gamma}^i + 2\Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl}\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k\dot{\gamma}^l + \Gamma^i_{jk}\dot{\gamma}^j\ddot{\gamma}^k + \Gamma^i_{jkl}\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k\dot{\gamma}^l = 0;$$

se sobreentiende que los coeficientes son los relativos a la carta dada, calculados sobre los puntos de la curva.

4 Estructura conforme y conexión normal de Cartan

En esta sección pretendemos mostrar cómo, sobre una variedad dotada de una estructura conforme, aparecen definidas una familia de conexiones de segundo orden que no son trivialmente inducidas por conexiones lineales. Dicha familia está íntimamente ligada a la conexión normal de Cartan de la estructura conforme. Con ello pretendemos indicar la relevancia que puede tener el estudio y el uso de las conexiones de segundo orden. Por ejemplo, según se deduce del trabajo que hemos realizado y que aquí se esboza, dada una estructura (semi)riemanniana sobre una variedad, además de la conexión de segundo orden naturalmente inducida por la conexión de Levi-Civita, aparece canónicamente otra conexión de segundo orden, que proyecta igualmente en la de Levi-Civita, cuya parte específica de segundo orden no coincide con la de la primera si el tensor de Ricci no se anula.

Sea $[g]$ una estructura conforme sobre una variedad M, es decir, una clase de equivalencia de métricas respecto a la relación de equivalencia

$$g \sim g' \quad \Leftrightarrow \quad g' = \kappa g, \text{ con } \kappa\colon M \to \mathbb{R}^+;$$

en todo lo que sigue no importará cuál sea la signatura elegida de las métricas.

Equivalentemente, una estructura conforme consiste en dar una G-estructura sobre M, con $G = CO(n)$ el grupo lineal conforme, subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$; es decir, consiste en dar un subfibrado principal P de LM con grupo de estructura $CO(n)$. A partir de P, por un procedimiento canónico ([5],[7]), se construye un subfibrado principal P^2 de $F^2(M)$ con grupo de estructura $CO(n) \otimes \mathfrak{co}(n)_1 \subset GL(n,\mathbb{R}) \otimes S^2(n) \cong G^2(n)$; donde $\mathfrak{co}(n)_1$ es la primera prolongación del álgebra de Lie $\mathfrak{co}(n)$ de $CO(n)$, que se define por

$$\mathfrak{co}(n)_1 = \{t \in S^2(n) : t(v,\cdot) \in \mathfrak{co}(n)\};$$

vskip-5pt el espacio vectorial $\mathfrak{co}(n)_1$ es intrínsecamente isomorfo a $\mathbb{R}^{n\,*}$.

La proyección de $F^2(M)$ en LM concuerda con una proyección natural de P^2 en P. Las conexiones principales en P y en P^2 se extienden a conexiones en LM y en $F^2(M)$, por lo que podemos considerarlas conexiones lineales y de segundo orden, respectivamente. Una conexión de segundo orden en P^2 proyecta en una conexión lineal en P. El monomorfismo σ^2_λ de LM en $F^2(M)$, definido por una conexión lineal λ (ver sección 2), concuerda con un monomorfismo, que denotaremos igual, de P en P^2; así, una conexión lineal en P induce, por el mismo procedimiento que en general, una conexión de segundo orden en P^2. También los fibrados TM y $T^2(M)$ se pueden considerar fibrados asociados a P y a P^2, respectivamente.

Sobre P^2 está definida canónicamente la llamada *conexión normal de Cartan de la estructura conforme.* Vamos a tratar de explicar en qué consiste y en qué se diferencia de una conexión principal, sin entrar en demasiados detalles técnicos (véanse [5] y [7]). Una conexión principal sobre un fibrado principal $Q(M,G)$, como sabemos, consiste en una distribución en TQ de subespacios de dimensión igual a $\dim(M) \equiv n$, transversales a las fibras de Q y tales que son invariantes bajo la acción principal del grupo G. Equivalentemente, se puede definir la conexión principal por medio de una 1-forma diferencial sobre Q, digamos ϖ, valuada en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, que se anula precisamente sobre los vectores de la mencionada distribución, y que tiene unas propiedades bien conocidas que la caracterizan: (i) $\varpi(A^\sharp) = A$, $\forall A \in \mathfrak{g}$, siendo $A^\sharp$ el correspondiente campo fundamental sobre Q generado infinitesimalmente por la acción principal; y (ii) $\varpi(R_{a*}X) = Ad^G_{a^{-1}}(\varpi(X))$, $\forall X \in TQ$ y $\forall a \in G$, siendo R_a la acción principal de a sobre Q y Ad^G la representación adjunta de G en $\mathfrak{g}$. La propiedad (ii) se resume diciendo que ϖ es de *tipo* Ad^G.

Veamos lo que sería una conexión de Cartan, al menos en un caso suficientemente general para nuestros propósitos. Supongamos que G es subgrupo de un grupo de Lie, digamos $\tilde{G}$, cuya álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ es canónicamente isomorfa a $\mathbb{R}^n + \mathfrak{g}$. Una conexión de Cartan sobre Q, relativa a $\tilde{G}$, consiste también en una distribución de subespacios de dimensión n, transversales a las fibras de Q pero que, en general, no son invariantes bajo la acción principal del grupo G. Se define por medio de una 1-forma diferencial sobre Q, digamos ϑ, valuada en el álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$, y las propiedades que la caracterizan son: (i) $\vartheta(A^\sharp) = A$, $\forall A \in \mathfrak{g}$; (ii) es de tipo $Ad^{\tilde{G}}|_G$, la representación adjunta de $\tilde{G}$ en $\tilde{\mathfrak{g}}$ restringida a G; y (iii) $\vartheta(X) = 0 \;\Leftrightarrow\; X = 0$, con $X \in TQ$. Los subespacios transversales, definidos como $\{X \in T_qQ \;:\; \vartheta(X) \in \mathbb{R}^n\}$, son los *subespacios horizontales* para la conexión de Cartan ϑ. Dichos subespacios serán invariantes bajo la acción principal del grupo G, y por tanto definirán una conexión principal, si $Ad^{\tilde{G}}|_G(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$; es decir, si $\mathbb{R}^n$ es una subálgebra invariante de $\tilde{\mathfrak{g}}$. En este caso, la parte $\mathfrak{g}$ valuada de ϑ nos daría la 1-forma de la conexión principal.

Vayamos al caso de una variedad dotada de estructura conforme. Sobre el fibrado P^2 hay definida una familia de conexiones de Cartan relativas al llamado grupo conforme completo. Este grupo ([5]) contiene como subgrupo a $CO(n) \otimes \mathfrak{co}(n)_1$ y su álgebra de Lie se expresa como $\mathbb{R}^n + \mathfrak{co}(n) + \mathfrak{co}(n)_1$, donde $\mathbb{R}^n$ es una subálgebra que no es invariante. La conexión normal de Cartan se obtiene como la única cuya parte $\mathbb{R}^n + \mathfrak{co}(n)$ valuada es la forma canónica de P^2, heredada de la forma canónica de $F^2(M)$ ([4]) y cuya curvatura de Cartan (ver la definición dada en [5] o una definición alternativa en [7]) tiene la parte valuada en $\mathfrak{co}(n)$ con sus trazas nulas; se puede ver que esta última condición nos pide que esta parte de la curvatura de Cartan sea, esencialmente, el tensor de Weyl de la estructura conforme.

La conexión de segundo orden en P^2 que induce una conexión lineal λ (véase la sección 1) se puede pensar como la distribución de n-subespacios transversales en TP^2 que se obtiene de llevar, via $\sigma^2_\lambda \colon P \to P^2$, la distribución de subespacios λ-horizontales en TP a la imagen de σ^2_λ y, luego, mover a éstos con la acción principal sobre todo TP^2. Si en vez de ello, consideramos sobre la imagen de σ^2_λ los n-subespacios transversales que proporciona una conexión de Cartan y, luego, los movemos por la misma acción principal obtenemos una distribución horizontal correspondiente, también, a una conexión de segundo orden en P^2. En resumen, dada una conexión λ en P existe una única conexión de segundo orden en P^2 cuyos subespacios horizontales coinciden con los subespacios horizontales de la conexión normal de Cartan sobre $\sigma^2_\lambda(P) \subset P^2$

([7]). Para que dicha conexión de segundo orden fuera la inducida por λ, en el sentido de la sección 1, es necesario y suficiente que $\sigma^2_\lambda(P)$ fuera tangente a la distribución horizontal que define la conexión normal de Cartan. Un análisis de las ecuaciones de estructura de una conexión de segundo orden y de la conexión normal de Cartan ([7]) muestra la necesidad de que el tensor de Ricci de la conexión lineal λ se anule para que sean iguales la conexión de segundo orden inducida por ésta y la conexión de segundo orden coincidente con la conexión nomal de Cartan sobre $\sigma^2_\lambda(P)$.

La ecuación diferencial de tercer orden (ecuación (2) de la sección 3) de la nueva conexión de segundo orden, proporcionada por una conexión lineal λ en P, difiere de la ecuación $\nabla^\lambda_{\gamma^1}(\nabla^\lambda_{\gamma^1}\gamma^1) = 0$ en que en el segundo término aparece, en vez de 0, una expresión que depende del tensor de Ricci de λ y de las primeras derivadas de la curva. Por supuesto, dicho término se anula si el tensor de Ricci se anula.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Grupo de Investigación en Geometría, P.A.I.: FQM0203.

References

[1] E. Aguirre-Dabán, I. Sánchez-Rodríguez, *Proc. of the 1st Int. M eeting on Geometry and Topology (Braga, Portugal, 97)*, 191-205, ed. A. Pereira do Vale y M. R. Pinto, Braga (1998).

[2] M. F. Atiyah, Trans. Amer. Math. Soc., **85**, 181-207, (1957).

[3] R. H. Bowman, J. Diff. Geom., **7**, 549-561, (1972).

[4] S. Kobayashi, *Proc. Sympos. Pure Math.* Vol. III, 186-193, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1961).

[5] S. Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer, Heidelberg (1972).

[6] S.Kobayashi, K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol.I, John Wiley, New York (1963).

[7] I. Sánchez-Rodríguez, *Conexiones en el fibrado de referencias de segundo orden. Conexiones conformes*, Tesis, Univ. Complutense, Madrid (1994).